Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Уральский математический центр

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби

Материалы
III Международного семинара, посвящённого 75-летию
академика А. И. Субботина

Екатеринбург, Россия
26–30 октября 2020 г.

Екатеринбург
2020

УДК 517.9 + 519.63

ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

Мероприятие проводится при финансовой поддержке РФФИ,
проект № 20-01-22017

Редактор: В. С. Пацко

«Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби» (CGS'2020): Материалы III Междунар. семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина, Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. 350 с.

В сборнике анонсируются результаты исследований, представленных на семинаре CGS'2020. Эти материалы отражают современное состояние следующих научных направлений: теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби, математическая теория управления динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, оценивание и идентификация в динамических системах, обратные задачи и управляемые распределенные системы, численные алгоритмы решения задач оптимального управления и краевых задач для уравнений Гамильтона – Якоби.

ISBN 978-5-8295-0729-9

Оптимизация матрицы переходных вероятностей для метода IMM траекторного слежения

Д. А. Бедин[1], *А. Г. Иванов*[1]
e-mail: bedin@imm.uran.ru, iagsoft@imm.uran.ru

1. Задача траекторного слежения

Рассмотрим следующую постановку задачи наблюдения за подвижным объектом. В дискретные моменты времени $\{t_i\}_{i=1}^n$ производятся неточные измерения

$$y_i = x(t_i) + w_i$$

положения объекта, движущегося по траектории $x(\cdot)$. Ограничимся исследованием плоского движения: $y_i, x(t_i), w_i \in \mathbb{R}^2$. Вектор w_i есть ошибка измерения, будем считать её гауссовской: $w_i \sim \mathcal{N}(0, W_i)$. Последовательность матриц ковариаций W_i задана заранее. Задача траекторного слежения (trajectory tracking, [1]) состоит в том, чтобы по измерениям $\{y_i\}_{i=1}^j$, известным до текущего момента времени t_j, получить оценку $\hat{x}_j$ положения $x(t_i)$, близкую к нему в некоторой метрике.

Для траекторного слежения применяют разные алгоритмы в зависимости от того, насколько сложно устроены возможные траектории $x(\cdot)$. Если динамика движения задана в виде

$$x(t_i) = Ax(t_{i-1}) + v_i, \tag{1}$$

где A — известная матрица, а v_i — случайная величина, называемая шумом системы, оптимальным в смысле минимизации среднеквадратичной ошибки $\mathbf{E}\{\|\hat{x}_i - x(t_i)\|^2\}$ является фильтр Калмана [1].

В том случае, если движение предполагает переключения между различными вариантами динамики (1), успешно применяют алгоритмы, основанные на скрытых марковских моделях [2]. Наиболее популярным из них в настоящее время является метод Interacting Multiple Model (IMM), ставший де-факто стандартом в области траекторного слежения за самолётами (в программах для диспетчерских служб воздушного движения).

[1]Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

2. Оптимизация вероятностей перехода

Работа алгоритма IMM во многом определяется его внутренними параметрами. Значимыми параметрами являются характеристики шумов системы и матрицы A для нескольких вариантов динамики (1) (обозначим их число символом m). Но ещё сильнее свойства трека оценок $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^n$ зависят от матрицы $P = [p_{kj}]_{k,j=1}^m$ переходных вероятностей. Её элементы задают вероятности переключения между различными вариантами динамики: p_{kj} — вероятность смены динамики k динамикой j. Возникает задача оптимизации параметров матрицы P с целью улучшить общее качество траекторного слежения.

Ранее авторами была разработана программа оптимизации алгоритмов траекторного слежения [3]. Основу программы составляет генетический алгоритм оптимизации [4]. В настоящее время программа адаптирована для подбора параметров метода IMM, о чём сообщалось в [5].

При оптимизации параметров матрицы переходных вероятностей авторы столкнулись с тем, что генетические алгоритмы плохо приспособлены к ограничениям типа равенств (из-за процедуры случайной мутации, сводящейся к сдвигу параметров на случайный вектор), в то время как для вероятностей перехода p_{kj} справедливо

$$\sum\nolimits_{\ell=1}^{m} p_{k\ell} = 1, \qquad p_{kj} \in [0,1]. \tag{2}$$

Естественным решением было перейти к некоторой параметризации $p_{kj} = f_{kj}(\varepsilon)$ величин $p_{k\ell}$ при помощи нового вектора параметров ε. Новая параметризация должна быть такой, чтобы для вектора ε ограничений типа равенств уже не было, а условие (2) выполнялось автоматически по свойствам функций f_{kj}. Кроме того, важно, чтобы ограничения типа неравенств на новые параметры ε имели как можно более простой вид, например, $\varepsilon_{kj} \in [a,b]$.

3. Варианты параметризации матрицы P

Первоначально была выбрана следующая параметризация:

$$
\begin{aligned}
p_{k1} &= (1-\varepsilon_{k2})(1-\varepsilon_{k3})\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{km}),\\
p_{k2} &= \varepsilon_{k2}(1-\varepsilon_{k3})\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{km}),\\
&\vdots\\
p_{k(m-1)} &= \varepsilon_{k(m-1)}(1-\varepsilon_{km}),\\
p_{km} &= \varepsilon_{km},\\
\varepsilon_{kj} &\in [0,1], \qquad j=\overline{2,m}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

С её помощью было получено улучшение качества работы программы траекторного слежения. Однако, начиная с некоторой итерации генетического алгоритма, улучшение качества замедлилось, а матрица P, восстановленная по параметрам ε, почти перестала изменяться.

Была высказана гипотеза, что замедление оптимизации происходит по причине того, что преобразование (3) неравномерно отображает параметры $\varepsilon_{k\ell}$ в параметры p_{kj}. Так, если для вектора $\varepsilon_k = [\varepsilon_{k1}\cdots\varepsilon_{k(m-1)}]^\mathsf{T}$ задать равномерное распределение на множестве $[0,1]^{m-1}$, то после отображения по правилу (3) распределение вектора $p_k = [p_{k1}\cdots p_{km}]^\mathsf{T}$ на симплексе (2) уже не будет равномерным. При этом сосредоточение распределения будет наблюдаться в сторону p_{kj} с большими номерами j. Такому же влиянию должно быть подвержено и распределение точек популяции генетического алгоритма.

Состояние популяции в реальных расчётах косвенно подтверждает такую гипотезу. Для преодоления указанной проблемы потребовалась новая параметризация, «равномерно» отображающая пространство параметров на симплекс (2).

Известно [6], что равномерное распределение на симплексе (2) можно моделировать при помощи распределения Дирихле $\mathbf{Dir}(\alpha_1=1,\ldots,\alpha_m=1)$, которое в свою очередь моделируется при помощи экспоненциального распределения:

$$
\varepsilon'_{kj}\sim\mathbf{Exp}(1) \implies \left(\frac{\varepsilon'_{k1}}{\sum_{\ell=1}^m\varepsilon'_{k\ell}},\ldots,\frac{\varepsilon'_{km}}{\sum_{\ell=1}^m\varepsilon'_{k\ell}}\right)\sim\mathbf{Dir}(1,\ldots,1).
$$

Последнее, используя метод обратного преобразования [7], можно получить при помощи замены $\varepsilon'_{kj} = -\log\varepsilon_{kj}$ из равномерно распределённых на полуинтервале $(0,1]$ величин $\varepsilon_{kj} \sim \mathbf{U}(0,1]$. В итоге, получаем следующую параметризацию:

$$p_{kj} = \frac{-\log \varepsilon_{kj}}{-\sum_{\ell=1}^{m} \log \varepsilon_{k\ell}}, \quad \varepsilon_{kj} \in (0,1]. \tag{4}$$

4. Заключение

Применение параметризации (4) в программе оптимизации позволило улучшить результаты траекторного слежения по сравнению с версией, использующей параметризацию (3). Примечательно, что в популяции генетического алгоритма при новой параметризации были представлены особи с достаточно разнообразными значениями матрицы P.

[1] *Bar-Shalom Y., Blair W.D.* Multitarget-Multisensor Tracking: Applications and Advances. Vol. III. Artech House, 2000.

[2] *Li X.R., Jilkov V.P.* Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2005. V. 41, no. 4. P. 1255–1321. DOI: 10.1109/TAES.2005.1561886

[3] *Bedin D., Ivanov A.* The Use of a Genetic Algorithm for Parameter Adjustment of the Multi-Hypothesis Aircraft Tracking Algorithm // 2019 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS): Proceedings of International Conference, Saint Petersburg, Russia, May 27–29, 2019. P. 1–4. DOI: 10.23919/ICINS.2019.8769413

[4] *Michalewicz Z.* Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.

[5] *Бедин Д.А., Иванов А.Г., Ганебный С.А.* Задача оценки траектории самолета, улучшение точности при помощи генетического алгоритма // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всерос. конф., посв. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г. Ижевск: Изд. «Удмуртский университет», 2020. С. 251–252.

[6] *Reed W.J.* Random points in a simplex // Pacific J. Math. 1974. Vol. 54, no. 2. P. 183–198.

[7] *Devroye L.* Non-Uniform Random Variate Generation. New York: Springer-Verlag, 1986.