

УДК 517.97

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

М. А. Зарх, А. Г. Иванов

Предлагается алгоритм численного построения функции цены в линейной дифференциальной игре произвольной размерности с выпуклой терминальной платой. Задача сводится к построению множества позиционного поглощения (максимального стабильного моста). Алгоритм обобщает идеи, лежащие в основе ранее разработанных алгоритмов для игр размерности 2,3.

Введение

В последние годы интенсивно разрабатываются численные методы решения дифференциальных игр [1–7, 9, 10, 13, 16, 17]. В данной статье для линейной антагонистической дифференциальной игры с выпуклой терминальной функцией платы предлагается алгоритм численного построения функции цены. Используются два способа представления функции цены игры: посредством семейства множеств уровня и через надграфик. В обоих случаях задача сводится к построению множества позиционного поглощения (максимального стабильного моста). Несмотря на то, что давно известны общие схемы построений [5, 11, 12] и соответствующие оценки [2, 9, 10], их алгоритмизация и численная реализация наталкиваются на сложности, связанные с требуемым большим объемом памяти и быстродействием ЭВМ.

Предлагаемый алгоритм обобщает на случай произвольной размерности идеи, заложенные в основу процедур решения двумерных [1] и трехмерных [3, 4] игр. При этом максимально используется специфика рассматриваемого класса задач: линейность, выпуклость функции платы, независимость ограничений на компоненты управляющих воздействий. Приводятся результаты расчетов на ЭВМ.

Другой алгоритм численного решения линейной дифференциальной игры высокой размерности излагается в статье Боткина Н.Д. и Рязанцевой Е.А. в данном томе.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дифференциальную игру

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(t)u + C(t)v, & x &\in R^n, \\ u &\in P \subset R^k, & v &\in Q \subset R^m, \end{aligned} \quad (1.1)$$

с фиксированным моментом окончания ϑ и выпуклой терминальной функцией платы $\gamma(x(\vartheta))$. Отсутствие фазового вектора в правой части системы достигается известной заменой переменных [5], и рассмотрение

игры (1.1) не сужает общности исследований. Будем предполагать, что множества P , Q , ограничивающие управляющие воздействия игроков, имеют вид

$$P = \{p : |p_i| \leq \mu_i, i = \overline{1, k}\},$$

$$Q = \{q : |q_j| \leq \nu_j, j = \overline{1, m}\}.$$

Таким образом, множества P , Q — параллелепипеды, симметричные относительно нуля.

Обозначим через $\Gamma(t, x)$ функцию цены игры (1.1). Рассмотрим два варианта ее представления: посредством семейства множеств уровня $W_c = \{(t, x) : \Gamma(t, x) \leq c\}$ и через надграфик $\hat{W} = \{(t, x, s) : s \geq \Gamma(t, x)\}$.

Множество W_c есть максимальный стабильный мост (множество позиционного поглощения) в игре сближения-уклонения с целевым множеством $M_c = \{x : \gamma(x) \leq c\}$.

Надграфик $\hat{W}$ также можно интерпретировать [14] как максимальный стабильный мост в дифференциальной игре $n + 1$ порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = B(t)u + C(t)v, & u \in P, \quad v \in Q, \\ \dot{x}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

с целевым множеством

$$\hat{M} = \{(x, x_{n+1}) : x_{n+1} \geq \gamma(x)\}.$$

Указанная связь функции цены игры с максимальными стабильными мостами позволяет свести построение функции цены либо к построению семейства мостов в пространстве $R^1 \times R^n$, либо к построению одного моста в пространстве $R^1 \times R^{n+1}$. Во втором случае, чтобы работать с ограниченными множествами, можно выполнить построение части надграфика $\hat{W}_c = \{(t, x, x_{n+1}) : \Gamma(t, x) \leq x \leq c\}$, лежащей ниже уровня c , взяв в качестве целевого множества $\hat{M}_c = \{(x, x_{n+1}) : \gamma(x) \leq x_{n+1} \leq c\}$.

Дальнейшее изложение посвящено разработке алгоритма численного построения максимального стабильного моста в игре сближения-уклонения с выпуклым целевым множеством $M \subset R^n$, динамика которой записана в форме (1.1).

В соответствии с общей схемой [5, 11, 12], мост W представляется последовательностью множеств W_j , каждое из которых аппроксимирует сечение моста $W(\vartheta - j\Delta) = \{x : (\vartheta - j\Delta, x) \in W\}$. Последовательность W_j определяется при помощи рекуррентных формул

$$W_{j+1} = (W_j + B(\vartheta - j\Delta)P\Delta) \div C(\vartheta - j\Delta)Q\Delta, \quad W_0 = M, \quad (1.3)$$

где $\div$ — символ геометрической разности [11]:

$$R \div D = \bigcap_{d \in D} (R - d),$$

M аппроксимирует M . Известно [2, 10], что если Δ мало, а M близко к M , то W_j близко к $W(\vartheta - j\Delta)$, $j = 1, 2, \dots$.

Пусть $B_i(\cdot)$ ($C_i(\cdot)$) — i -й столбец матрицы $B(\cdot)$ ($C(\cdot)$). Обозначим через p_i^j (q_i^j) отрезок с вершинами $\pm\mu_i B_i(\vartheta - j\Delta)\Delta$ ($\pm\nu_i C_i(\vartheta - j\Delta)\Delta$). Имеем

$$B(\vartheta - j\Delta)P\Delta = \sum_{i=1}^k p_i^j, \quad C(\vartheta - j\Delta)Q\Delta = \sum_{i=1}^m q_i^j.$$

Выражение (1.3) можно переписать в виде

$$W_{j+1} = (W_j + (\sum_{i=1}^k p_i^j)) \div (\sum_{i=1}^m q_i^j) \quad (1.4)$$

и затем перейти к соотношению

$$W_{j+1} = (\dots((\dots(W_j + p_1^j) + \dots + p_k^j) \div q_1^j) \dots \div q_m^j). \quad (1.5)$$

Выполнение (1.5) сводится к последовательности действий, в которых одним из операндов является отрезок. Переход от (1.4) к (1.5) возможен в силу ассоциативности сложения и свойства операции взятия геометрической разности, выраженного равенством

$$R \div (D + F) = \bigcap_{d \in D, f \in F} (R - (d + f)) = \bigcap_{f \in F} (\bigcap_{d \in D} (R - d) - f) = (R \div D) \div F.$$

Будем считать, что множество M — выпуклый многогранник. Тогда результат выполнения операции сложения с отрезком — выпуклый многогранник, результат выполнения операции геометрической разности с отрезком — либо выпуклый многогранник, либо пустое множество. В последнем случае построения завершаются.

Таким образом, W_j — последовательность многогранников. Ее построение сводится к решению двух задач:

1. Нахождение алгебраической суммы выпуклого многогранника и отрезка.
2. Нахождение геометрической разности между выпуклым многогранником и отрезком.

Введем основные обозначения, а также определим форму входной и выходной информации для алгоритмов решения задач 1 и 2.

Пусть

$$\rho_F(l) = \max_{f \in F} l'f$$

— значение опорной функции выпуклого компакта $F \subset R^n$ на векторе l ; con , conv — символы конической и выпуклой оболочек.

Для выпуклого многогранника $V \subset R^n$ с непустой внутренностью введем следующие обозначения:

A_V — множество вершин V ;

L_V — множество единичных внешних нормалей к граням размерности $n - 1$;

P_V — набор значений $\rho_V(l)$ для $l \in L_V$;

$G_V = \{G_V(l), l \in L_V\}$ — описание граней размерности $n - 1$ многогранника V . Здесь $G_V(l) \subset A_V$ — совокупность вершин грани с нормалью l ;

$K_V = \{K_V(a), a \in A_V\}$ – информация, двойственная G_V , т.е. $K_V(a)$ – совокупность нормалей к граням, содержащим вершину a .

Пусть

$$g_V(l) = \{v \in V : l'v = \max_{v \in V} l'v\}.$$

В частности, для $l \in L_V$ имеем $g_V(l) = \text{con}V(G_V(l))$ – грань с нормалью l . Обозначим $k_V(a) = \text{con}(K_V(a))$ – конус, соответствующий вершине a .

Приведем некоторые свойства, поясняющие взаимосвязь введенных объектов:

- 1) $R^n = \bigcup_{a \in A_V} k_V(a)$,
- 2) $\text{int}(k_V(a')) \cap \text{int}(k_V(a'')) = \emptyset$, $a', a'' \in A_V$,
- 3) Сужение опорной функции $\rho_V(\cdot)$ на каждый из конусов $k_V(a)$, $a \in A_V$ – линейная функция.

Таким образом, пространство R^n разбивается на конусы линейности опорной функции $\rho_V(\cdot)$, каждый из которых соответствует вершине многогранника V .

Информацию о многограннике V , состоящую из A_V , L_V , P_V , G_V , K_V , обозначим через I_V . Теперь можно формализовать задачи 1 и 2: в задаче 1 (2) требуется построить I_{V+p} ($I_{V \div q}$) по заданным I_V и отрезку p (q). Отметим, что информация I_V избыточна для идентификации многогранника. Однако ее использование позволяет разработать эффективные алгоритмы решения задач 1 и 2.

§ 2. Алгоритм построения суммы многогранника и отрезка

Пусть заданы информация I_V о многограннике V и отрезок p с вершинами p^+ , p^- . Обозначим $\bar{p} = p^+ - p^-$, $\pi = \{l : l'\bar{p} = 0\}$, $\pi^+ = \{l : l'\bar{p} > 0\}$, $\pi^- = \{l : l'\bar{p} < 0\}$, $\bar{\pi}^+ = \pi \cup \pi^+$, $\bar{\pi}^- = \pi \cup \pi^-$.

Опорная функция многогранника $V + p$ определяется по формуле

$$\rho_{V+p}(l) = \rho_V(l) + \rho_p(l).$$

Имеем

$$\rho_p(l) = \begin{cases} l'p^+, & l \in \pi^+ \\ l'p^-, & l \in \pi^- \end{cases}$$

тогда,

$$\rho_{V+p}(l) = \begin{cases} \rho_V(l) + l'p^+, & l \in \pi^+ \\ \rho_V(l) + l'p^-, & l \in \pi^- \end{cases}$$

Следовательно, если $k_V(a) \subset \pi^+$ ($k_V(a) \subset \pi^-$), то $a + p^+$ ($a + p^-$) $\in A_{V+p}$ и $k_{V+p}(a + p^+) = k_V(a)$ ($k_{V+p}(a + p^-) = k_V(a)$).

Пусть $\text{int } k_V(a) \cap \pi \neq \emptyset$. Тогда

$$\rho_{V+p}(l) = \begin{cases} l'(a + p^+), & l \in k_V(a) \cap \pi^+ \\ l'(a + p^-), & l \in k_V(a) \cap \pi^- \end{cases}$$

т.е. вершины, чьи конусы линейности пересекаются плоскостью π , порождают две новые вершины $a + p^+$, $a + p^-$ и, соответственно, два конуса линейности.

Нам удобно ввести в рассмотрение многогранник V^* , совокупность граней которого порождает разбиение R^n на конусы линейности опорной функции $\rho_V(\cdot)$, а именно, каждый конус $k_V(a)$ есть коническая оболочка соответствующей грани V^* . В качестве такого многогранника можно взять двойственный [8] многогранник

$$V^* = \{v^* \in R^n : v^{*'}(v - v_0) \leq 1, v \in V\},$$

где v_0 — произвольная зафиксированная внутренняя точка V . Для упрощения изложения будем считать, что V содержит начало координат и v_0 совпадает с ним.

Каждой грани размерности r многогранника V соответствует грань размерности $n-r-1$ многогранника V^* . В частности, вершине V соответствует $n-1$ -грань V^* , и наоборот. Полная информация о V^* содержится в I_V . Действительно,

$$A_{V^*} = \{a^* = l/\rho_V(l), l \in L_V\},$$

$$L_{V^*} = \{l^* = a/|a|, a \in A_V\},$$

$$P_{V^*} = \{\rho^*(l^*) = 1/|a|, l^* = a/|a|\},$$

$$K_{V^*} = G_V, \quad G_{V^*} = K_V.$$

В терминах двойственного многогранника V^* опишем построение обрезающих новых конусов линейности ρ_{V+p} .

Предварительно сформулируем ряд лемм.

Лемма 1. Пусть F — выпуклый многогранник, $H = \{x : h'x \leq 0\}$ — полупространство. Если $F \cap H \neq \emptyset$, то $\text{conv}(F) \cap H = \text{conv}(F \cap H)$.

Лемма 2. Пусть $\{A_i\}$ — конечный набор множеств. Справедливо равенство

$$\text{conv}\left(\bigcup_i (\text{conv } A_i)\right) = \text{conv}\left(\bigcup_i A_i\right).$$

В следующей лемме символы $\dim$, ∂ означают размерность и относительную границу.

Лемма 3. Пусть F — выпуклый многогранник, $H = \{x : l'h \leq 0\}$ — полупространство, причем $\dim(F) > 1$. Тогда

$$F \cap H = \text{conv}(\partial F \cap H).$$

В обозначении многогранника F^j в качестве верхнего индекса будем указывать его относительную размерность.

Лемма 4. Пусть F^{n-1} — многогранник, $H = \{x : l'h \leq 0\}$ — полупространство. Тогда

$$F^{n-1} \cap H = \text{conv}\left(\bigcup_m (F_m^1 \cap H)\right), \quad (2.1)$$

где $\{F_m^1\}$ — совокупность одномерных граней многогранника F^{n-1} .

Как уже отмечалось, каждый конус линейности $K_V(a)$, рассекаемый плоскостью π , порождает два конуса линейности функции ρ_{V+p} : $k_V(a) \cap \pi^+$ и $k_V(a) \cap \pi^-$.

Рассмотрим, например, задачу построения $k_V(a) \cap \pi^+$. Равенство $k_V(a) = \text{con}(g_{V^*}(a/|a|))$ и лемма 1 позволяют свести поставленную задачу к нахождению пересечения грани $g_{V^*}(a)$ и полупространства π^+ . Отыскав вершины пересечения $g_{V^*}(a/|a|) \cap \pi^+$, тем самым построим образующие конуса $k_V(a) \cap \pi^+$.

Согласно лемме 4 вершинами $g_{V^*}(a/|a|) \cap \pi^+$ являются все вершины грани $g_{V^*}(a/|a|)$, принадлежащие π^+ , плюс точки пересечения одномерных граней грани $g_{V^*}(a/|a|)$ с плоскостью π . Действительно, пересечение каждой одномерной грани с полупространством в выражении (2.1) либо совпадает с этой гранью, либо является отрезком, у которого одна из вершин новая, либо пусто. В первом случае отрезок представляем в виде выпуклой оболочки двух старых вершин, во втором случае — в виде выпуклой оболочки старой вершины и новой точки. Воспользовавшись леммой 2, приходим к выводу о совокупности вершин пересечения $g_{V^*}(a/|a|) \cap \pi^+$.

Таким образом, совокупность нормалей L_{V+p} составляют нормали L_V и новые нормали, которые порождаются одномерными гранями двойственного многогранника V^* , рассекаемыми плоскостью π . В терминах многогранника V этот факт формулируется следующим образом. Новая нормаль порождается гранью размерности $n - 2$ многогранника V , являющейся пересечением двух граней размерности $n - 1$ с нормальями, лежащими по разные стороны от плоскости π . Именно: новая нормаль принадлежит ортогональному дополнению к $n - 1$ -мерному линейному подпространству, определяемому $n - 2$ -мерной гранью и вектором p .

Информация о гранях является двойственной по отношению к информации о конусах. Поэтому правило определения совокупности граней G_{V+p} однозначно устанавливается по сформулированному способу построения K_{V+p} . Если $l \in L_V$, то $G_{V+p}(l) = G_V(l) + p^\pm$, $l \in \pi^\pm$. Пусть l — новая нормаль и $a_1, \dots, a_m$ — вершины $n - 2$ -мерной грани, ее породившей. Тогда $G_{V+p}(l) = \{a_i + p^+, a_i + p^-, i = 1, 2, \dots, m\}$.

Дадим формализованное описание построения L_{V+p} .

Разбиваем L_V и A_V на подмножества:

$$L_V^+ = L_V \cap \pi^+, \quad L_V^- = L_V \cap \pi^-, \quad L^0 = L_V \cap \pi,$$

$$A_V^\pm = \{a \in A_V : K_V(a) \subset \pi^\pm\}, \quad A_V^0 = A_V \setminus (A_V^+ \cup A_V^-).$$

Определяем A_{V+p} , L_{V+p} , P_{V+p} :

$$A_{V+p} = \{A_V^- + p^-\} \cup \{A_V^+ + p^+\} \cup \{A_V^0 + p^-\} \cup \{A_V^0 + p^+\},$$

$$L_{V+p} = L_V \cup L_{\text{нов}},$$

$$L_{\text{нов}} = \{l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 : \lambda_1, \lambda_2 > 0, l' \bar{p} = 0, |l| = 1, \\ l_1, l_2 \in L_V, l_1 \in \pi^-, l_2 \in \pi^+, \dim(g_V(l_1) \cap g_V(l_2)) = n - 2\},$$

$$\rho_{V+p}(l) = \rho_V(l) + l' p^\pm, \quad l \in \pi^\pm.$$

Отметим, что для $l \in L_V$ величина $\rho_V(l)$ известна, а для $l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 \in L_{\text{нов}}$ вычисляется по формуле $\rho_V(l) = \lambda_1 \rho_V(l_1) + \lambda_2 \rho_V(l_2)$.

Определяем G_{V+p} . Если $l \in L_V^\pm$, то $G_{V+p}(l) = G_V(l) + p^\pm$. Если $l \in L_V^0$, то

$$G_{V+p}(l) = \{G_V(l) \cap (A_V^+ \cup A_V^0) + p^+\} \cup \{G_V(l) \cap (A_V^- \cup A_V^0) + p^-\}.$$

Если $l \in L_{\text{нов}}$ и порождена парой $l_1, l_2 \in L_V$, то

$$G_{V+p}(l) = \{G_V(l_1) \cap G_V(l_2) + p^+\} \cup \{G_V(l_1) \cap G_V(l_2) + p^-\}.$$

Определяем $K_{V+p}(a)$. Если $a \in A_V^\pm + p^\pm$, то $K_{V+p}(a) = K_V(a - p^\pm)$. Если $a \in A_V^0 + p^\pm$, то $K_{V+p}(a) = \{K_V(a - p^\pm) \cap \pi^\pm\} \cup L_{\text{нов}}(a - p^\pm)$. Здесь $L_{\text{нов}}(a - p^\pm)$ – новые нормали, соответствующие тем n -2-мерным граням с вершинами из A^0 , в которые входит вершина $a - p^\pm$.

Описано формирование A_{V+p} , L_{V+p} , P_{V+p} , G_{V+p} , K_{V+p} . Таким образом, изложен алгоритм построения $V + p$ в форме I_{V+p} .

§ 3. Алгоритм построения геометрической разности многогранника и отрезка

Пусть задана информация I_V о многограннике V и отрезок q с вершинами q^-, q^+ .

Обозначим $\bar{q} = q^+ - q^-$, $\pi = \{l : l'\bar{q} = 0\}$, $\pi^+ = \{l : l'\bar{q} > 0\}$, $\pi^- = \{l : l'\bar{q} < 0\}$, $\bar{\pi}^+ = \pi^+ \cup \pi$, $\bar{\pi}^- = \pi^- \cup \pi$. Для многогранника и отрезка операцию геометрической разности можно записать в виде

$$V \div q = (V - q^+) \cap (V - q^-).$$

Отметим, что $V - q^-$ является переносом $V - q^+$ на вектор $\bar{q}$.

Введем обозначения

$$L_V^+ = L_V \cap \bar{\pi}^+, \quad L_V^- = L_V \cap \bar{\pi}^-,$$

$$\varphi(l) = \begin{cases} \rho_V(l) - l'q^+, & l \in \bar{\pi}^+ \\ \rho_V(l) - l'q^-, & l \in \bar{\pi}^- \end{cases}$$

Многогранники $V - q^+$, $V - q^-$ представимы в виде пересечения полупространств:

$$V - q^\pm = \{x : l'x \leq \rho_V(l) - l'q^\pm, \quad l \in L_V\}.$$

Так как

$$l'q^+ \geq l'q^- \text{ при } l \in L_V^+, \quad l'q^+ < l'q^- \text{ при } l \in L_V^-,$$

то

$$V \div q = \{x : l'x \leq \varphi(l), \quad l \in L_V\}.$$

Таким образом, $V \div q$ есть пересечение опорных полупространств многогранника V с нормальными из $\bar{\pi}^+$, сдвинутых на вектор $-q^+$, и опорных полупространств V с нормальными из $\bar{\pi}^-$, сдвинутых на $-q^-$.

Если размеры отрезка q существенно меньше размеров V , то, как и в случае построения $V + p$, значительная часть границы $V \div q$ наследует структуру граней и конусов линейности многогранника V .

В терминах функции φ построение $V \div q$ сводится к нахождению $\text{conv } \varphi = \rho_{V \div q}$. При этом выпуклость φ нарушается в окрестности плоскости π , и овыпукление φ требует локального изменения φ вдоль π , в то время как для значительной области аргумента значения функций $\text{conv } \varphi$ и ρ_V отличаются на постоянную величину.

Если размеры q соизмеримы или существенно больше размеров V , то возможен случай, когда $V \div q = \emptyset$ ($\text{conv } \varphi$ не существует).

Ниже предлагается четыре варианта построения $I_{V \div q}$. Каждый последующий вариант сложнее алгоритмически, но более экономичен с точки зрения быстроедействия. Случай $V \div q = \emptyset$ в алгоритмах оговариваться не будет. Он формально фиксируется, когда множество вершин результирующего многогранника пусто.

А л г о р и т м 1. Пусть A — множество точек, каждая из которых является пересечением n плоскостей вида $l'x = \varphi(l)$ с нормальными l из L_V . Тогда

$$\begin{aligned} A_{V \div q} &= \{a \in A : l'a \leq \varphi(l), l \in L_V\}, \\ L_{V \div q} &= \{l \in L_V : \exists a \in A_{V \div q}, l'a = \varphi(l)\}, \\ \rho_{V \div q}(l) &= \varphi(l), \quad l \in L_{V \div q}, \\ G_{V \div q}(l) &= \{a \in A_{V \div q} : l'a = \varphi(l)\}, \\ K_{V \div q}(l) &= \{l \in L_{V \div q} : l'a = \varphi(l)\}. \end{aligned}$$

Центральным моментом этого алгоритма является способ определения вершин $A_{V \div q}$. Перебирая возможные комбинации плоскостей, мы включаем точку их пересечения в число вершин, если она принадлежит всем полупространствам.

А л г о р и т м 2. Используя то свойство, что часть границы $V \div q$ получена параллельным переносом соответствующей части границы V , можно усовершенствовать алгоритм 1. С одной стороны, можно сократить множество точек A , претендующих на роль вершин $V \div q$, рассматривая не все комбинации нормалей из L_V . С другой стороны, можно выделить подмножество полупространств, принадлежность точки которым требует проверки.

Опишем правило выделения подмножества векторов $\tilde{L} \subset L_V$, которые могут породить “новые” вершины $V \div q$. Разобьем совокупность вершин A_V на три подмножества:

$$A_V^\pm = \{a \in A_V : K_V(a) \subset L_V^\pm\}, \quad A_V^0 = A_V \setminus (A_V^+ \cup A_V^-).$$

Обозначим

$$A_\varphi^\pm = (A_V^\pm \cup A^0) - q^\pm.$$

Множество точек A_φ^+ (A_φ^-) — это вершины части границы V , сдвинутой на $-q^+$ ($-q^-$). Точки из A_φ^+ и A_φ^- , принадлежащие полупространствам $l'a \leq \varphi(l)$ соответственно для $l \in L_V^-$ и $l \in L_V^+$, являются вершинами многогранника $V \div q$ и определяют его часть, наследуемую с V . Обозначим множество таких точек $\mathcal{A}_\varphi^+$ и $\mathcal{A}_\varphi^-$. Пусть $\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_V^+ \cup \mathcal{L}_V^-$ — нормали

к граням, все вершины которых попали в $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_\varphi^+ \cup \mathcal{A}_\varphi^-$. Векторы из $\mathcal{L}_V$ заведомо остаются в качестве нормалей $V \div q$, причем соответствующие им грани получаются параллельным переносом “старых” граней и нормали из $\mathcal{L}_V$ не участвуют в образовании “новых” вершин.

Выделим также множество векторов $\bar{L}$, которые не могут являться нормальными $V \div q$:

$$\bar{L} = \bar{L}^+ \cup \bar{L}^-,$$

$$\bar{L}^\pm = \{l \in L_V^\pm : \exists l_1 \in L_V^\mp, \forall v \in G(l) - q^\pm, l'_1 v \geq \varphi(l_1)\}.$$

Другими словами, $\bar{L}$ составляют нормали к граням, целиком отсекаемым одним полупространством.

Положим

$$\tilde{L}_V = L_V \setminus (\bar{L}_V \cup \mathcal{L}_V).$$

Далее выполняем алгоритм поиска новых вершин, аналогичный алгоритму 1. Опишем его. Пусть $\tilde{A}$ — множество точек, каждая из которых является пересечением плоскостей $l'_i x = \varphi(l_i)$, $i = \overline{1, n}$, с нормальными $l_i \in \tilde{L}_V$, причем рассматриваются лишь такие комбинации $\{l_i\}$, $i = \overline{1, n}$, в которых есть нормали как из L_V^- , так и из L_V^+ . Вершинами $V \div q$ являются те точки из $\tilde{A}$, которые принадлежат полупространствам $l'x \leq \varphi(l)$, $l \in \tilde{L}$.

Точки из $\tilde{A}$, прошедшие указанные проверки, в совокупности со “старыми” точками $\mathcal{A}_\varphi$ составляют множество вершин $A_{V \div q}$. Нормали $V \div q$ из множества $\tilde{L}_V$, соответствующие им грани, конусы новых вершин определяются как в алгоритме 1. Остальная информация $I_{V \div q}$ (соответствующая старым вершинам) наследуется из I_V .

Ниже приводится обоснование алгоритма 2, состоящее из двух пунктов.

1) Поясним, почему в множество $\tilde{A}$ можно не включать точки, соответствующие комбинациям векторов $\{l_i\}$, $i = \overline{1, n}$, лежащих по одну сторону от π . Пусть, например, $l_i \in \bar{\pi}^+$, $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим два возможных случая. В первом случае набору $\{l_i\}$ соответствует вершина v многогранника V , т.е. $l_i \in K_V(v)$. Тогда, если $v - q^+ \in \mathcal{A}_\varphi \setminus \mathcal{A}_\varphi$ (т.е. $l'(v - q^+) > \varphi(l)$ для некоторого l), то $v - q^+$ не является вершиной $V \div q$. Если же $v - q^+ \in \mathcal{A}_\varphi$, то информация, связанная с v , переносится в $I_{V \div q}$ из I_V . Рассмотрим второй случай, когда набору l_i не соответствует вершина V . Обозначим через κ точку пересечения плоскостей $l'_i x = \rho_V(l_i)$. Так как $\kappa \notin A_V$ и $l_i \in L_V^+$, то найдется такая нормаль $l_* \in L_V^+$, что $l'_* \kappa > \rho_V(l_*)$. Следовательно, для точки $\kappa - q^+$, являющейся пересечением плоскостей $l'_i x = \varphi(l_i)$, справедливо неравенство $l'_*(\kappa - q^+) > \varphi(l_*)$. Поэтому $\kappa - q^+$ не является вершиной $V \div q$. Изложенное позволяет заключить, что комбинации векторов, лежащих по одну сторону от π , не могут порождать новых вершин.

2) Из описания алгоритма 2 следует, что для включения точки $a \in \tilde{A}$ в совокупность вершин $V \div q$ достаточно проверить ее принадлежность полупространствам $l'x \leq \varphi(l)$ с нормальными l из $\tilde{L}_V$, а не всем полупространствам, как в алгоритме 1. Обоснуем такое сокращение. Пусть $a \in \tilde{A}$, $l'a \leq \varphi(l)$, $l \in \tilde{L}_V$ и $l_* \in \mathcal{L}_V$. Требуется показать, что $l'_* a \leq \varphi(l_*)$. Пусть для определенности $l_* \in \mathcal{L}_V^+$. Рассмотрим вектор $\tilde{l} \in \tilde{L}^+$, для которого

$\tilde{l}'a = \varphi(\tilde{l})$. Такой вектор найдется, так как точки из $\tilde{A}$ образуются комбинациями векторов, лежащих по разные стороны от π . Ввиду того, что $a \in g_V(\tilde{l}) - q^+$, а $g_V(\tilde{l}) - q^+$ принадлежит полупространству $l'_*x \leq \varphi(l_*)$, получаем $l'_*a \leq \varphi(l_*)$.

А л г о р и т м 3. Следующее усовершенствование алгоритма 2 связано со способом определения множества вершин $\mathcal{A}_\varphi$. Напомним, что множество $\mathcal{A}_\varphi$ составляют те вершины $V \div q$, которые получены в результате параллельного переноса вершин V . Другими словами, усовершенствование касается способа отсеивания лишних точек из $\mathcal{A}_\varphi$. В алгоритме 2 для точки $a \in A_\varphi^\pm$ требовалось проверить неравенство $l'a \leq \varphi(l)$ для всех векторов $l \in L_V^\mp$. Алгоритм 3 направлен на сокращение совокупности векторов l , требующих такой проверки.

Алгоритм 3 имеет итерационный характер. Нижний индекс вводимых обозначений будет соответствовать шагу алгоритма. Обозначим через $\bar{A}$ совокупность точек из A_φ , которые в результате проверок не включаются в число вершин $V \div q$. Напомним, что $\bar{L}$ — множество векторов из L_V , не попадающих в $L_{V \div q}$. Множества $\bar{A}$, $\bar{L}$ будут формироваться в ходе итерационного процесса. Изложим его общую схему.

Положим

$$L_1^+ = \bigcup_{a \in A^0} (K_V(a) \cap L_V^+).$$

На первом шаге пополняются множества $\bar{A}$, $\bar{L}$ и формируется набор нормалей L_2^- . На втором шаге формируется набор нормалей L_3^+ и продолжается пополнение $\bar{A}$, $\bar{L}$ и т.д.

Опишем первый шаг алгоритма 3. Зафиксируем вектор $l \in L_1^+$. Рассмотрим его в паре с каждой точкой $a \in A_\varphi^-$. Если $l'a < \varphi(l)$, то берем следующую точку. В противном случае множество $\bar{A}$ пополняем точкой a , а векторы $K_V(a + q^-) \cap L_V^-$, не содержащиеся в $\bar{L}$, включаем в L_2^- . Если среди точек, которые на основании проверки с вектором l включены в $\bar{A}$, содержатся все вершины какой-либо грани, то нормаль этой грани включаем в $\bar{L}$. Перебрав все $l \in L_1^+$, завершаем первый шаг.

Следующие шаги аналогичны первому. Имеется единственное отличие: в формируемые множества L_3^+ , L_4^- , L_5^+ , ... не включаются векторы, уже участвовавшие в проверках на предыдущих шагах.

Итерационный процесс заканчивается, если на очередном шаге формируемое множество (L_{i+1}^+ , если i четное; L_{i+1}^- , если i нечетное) остается пустым.

В результате описанной процедуры формируются множества $\mathcal{A}_\varphi = A_\varphi \setminus \bar{A}$ и $\bar{L}$. Вторая часть алгоритма 3 выполняется так же, как в алгоритме 2.

Для обоснования алгоритма 3 дадим его интерпретацию в терминах построения $\text{conv } \varphi$. Результат первой части алгоритма можно рассматривать как построение функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$, совпадающей с $\varphi(\cdot)$ в конусах, соответствующих точкам из $\mathcal{A}_\varphi$ (на нормалях из $\tilde{L}$), и равной $+\infty$ в конусах, соответствующих выброшенным вершинам (на выброшенных нормалях).

Покажем, что $\text{conv } \tilde{\varphi} = \text{conv } \varphi$. Для этого установим, что для любого вектора l , где $\tilde{\varphi}(l) = \infty$ (или, что то же самое, $\tilde{\varphi}(l) \neq \varphi(l)$) имеет место неравенство $\rho_{V \div q}(l) < \varphi(l)$. Сначала установим это свойство для

векторов из конусов выкинутых вершин, не являющихся его образующими. Пусть $k_V(a + q^+)$ — такой конус (для определенности считаем $a \in A_\varphi^+$) и $\tilde{l} \in L_V^-$ — вектор, для которого $\tilde{l}'a > \varphi(\tilde{l})$. Обозначим через D пересечение полупространств $\{l'x \leq \varphi(l), l \in \{\tilde{l}\} \cup K_V(a + q^+)\}$. Вершины D суть пересечение плоскости $\tilde{l}'x = \varphi(\tilde{l})$ с образующими конуса $\{l'x \leq \varphi(l), l \in K_V(a + q^+)\}$. Поэтому для $l \in k_V(a + q^+) \setminus K_V(a + q^+)$ имеем $\rho_{V \div q}(l) \leq \rho_D(l) < \varphi(l)$. Аналогичными рассуждениями можно прийти к такому же выводу и для векторов $l \in \tilde{L}$.

Покажем, что структура конусов и граней, построенная в ходе второй части алгоритма 3, соответствует выпуклой функции, равной $\text{conv } \tilde{\varphi}$. Введем понятие локальной выпуклости.

Функция ξ , определенная разбивкой на конусы линейности и значениями на образующих конусов, локально выпукла на образующей l_* , если она выпукла в окрестности l_* , содержащейся в объединении всех конусов линейности с образующей l_* . Пусть $k(a_j)$ — конусы, для которых l_* является образующей, a_j — соответствующие точки. Локальная выпуклость эквивалентна выполнению неравенства

$$l'a_j \leq \xi(l) \quad (3.1)$$

для всех точек a_j и любой образующей $l \in \bigcup_j K(a_j)$ рассматриваемых конусов.

Действительно, локальная выпуклость функции ξ означает, что она является опорной функцией множества $F = \{x: l'x \leq \xi(l), l \in \bigcup_j K(a_j)\}$, а точки a_j — вершины F .

Покажем, что функция ξ , построенная в результате выполнения второй части алгоритма 3, локально выпукла на каждой образующей.

Пусть l_* — образующая одного из конусов построенной функции. Если $l_* \in \mathcal{L}_V$, то структура грани и конусов линейности, соответствующих l_* , наследуется с V . Следовательно, наследуется и локальная выпуклость.

Рассмотрим случай, когда $l_* \in \tilde{L}$. Пусть $k(a_j)$ — конусы с образующей l_* , a_j — соответствующие им точки. Пусть $a \in \bigcup_j a_j$, $l \in \bigcup_j K(a_j)$. Для пары a, l возможны четыре варианта:

1) a — новая вершина, образованная в ходе второй части алгоритма 3, $l \in \tilde{L}$. Неравенство (3.1) выполнено в силу проверок этой части алгоритма.

2) a — новая, $l \in \mathcal{L}_V$. Неравенство (3.1) для этого случая обосновано в алгоритме 2.

3) a — старая, $l \in \tilde{L}$. В этом случае неравенство выполнено согласно первой части алгоритма 3.

4) a — старая, $l \in \mathcal{L}_V$. Если $a \in \mathcal{A}_V^+$, $l \in \mathcal{L}_V^+$ ($a \in \mathcal{A}_V^-$, $l \in \mathcal{L}_V^-$), то свойство (3.1) наследуется с V . Покажем, что вариант $a \in \mathcal{A}_V^+$, $l \in \mathcal{L}_V^-$ ($a \in \mathcal{A}_V^-$, $l \in \mathcal{L}_V^+$) невозможен. Действительно, если $a \in \mathcal{A}_V^+$, то $l_* \in L_V^+$. Но $l \in L_V^-$. Следовательно, общие точки для нормалей l, l_* — новые, что противоречит условию $l \in \mathcal{L}_V$.

Таким образом, построенная функция локально выпукла и совпадает с $\tilde{\varphi}$ на образующих конусов. Поэтому она выпукла глобально и

$$\xi = \text{conv } \tilde{\varphi} = \text{conv } \varphi = \rho_{V \div q}.$$

А л г о р и т м 4. В алгоритме 3 для фиксированной нормали $l \in L_i^+$ ($l \in L_i^-$) проверяется выполнение неравенств $l'a \leq \varphi(l)$ для всех $a \in A_\varphi^-$ ($a \in A_\varphi^+$). Алгоритм 4 связан с сокращением перебора вершин в указанном пункте алгоритма 3. Предполагаемое усовершенствование основано на следующем факте.

Пусть $l \in L_V^+$. Тогда часть границы многогранника $V - q^-$, лежащая выше плоскости $l'x = \varphi(l)$, — односвязное множество, причем в ней имеются вершины из $A_V^+ - q^-$. Поэтому указанная часть границы $V - q^-$ без граней с нормальными из L_V^+ либо пуста, либо имеет конечное число компонент связности. На границе каждой компоненты связности содержится точка из множества $A_V^0 - q^-$.

Сформулируем правило перебора вершин для фиксированной нормали $l \in L_i^+$ ($l \in L_i^-$). Проверяем неравенство $l'a \leq \varphi(l)$ для точек $a \in A_V^0 - q^-$ ($a \in A_V^0 - q^+$). Далее берем еще не проверенные вершины граней с нормальными из L_V^- (L_V^+), содержащих выбрасываемую точку. Процесс проверок с нормалью l заканчивается, когда множество вершин, требующих проверки, пусто.

§ 4. Регулировка количества нормалей

В соответствии с описанными алгоритмами нахождения суммы и геометрической разности, в рамках принятой кусочно-постоянной с шагом Δ дискретизации игры (1.2) последовательность многогранников W_i строится точно. В процессе операции сложения число нормалей возрастает (за исключением особого случая, когда многогранник имеет “кольцо” граней с нормальными, перпендикулярными отрезку). В ходе построения геометрической разности количество нормалей может сокращаться. В целом при построении последовательности многогранников W_i число граней может резко возрасти, особенно в пространствах большой размерности.

В связи с этим для реализации на ЭВМ возникает задача дополнения алгоритма тем или иным способом искусственного сокращения количества граней многогранников. Описываемый ниже алгоритм зависит от параметра, который можно рассматривать, с одной стороны, как регулятор количества граней, с другой — как точность аппроксимации.

В процессе построения $V + p$ формируем множество $L^\#$ нормалей, которые после завершения построения будут удалены. Совокупность векторов $L^\#$ является подмножеством новых нормалей, т.е. $L^\# \subset L_{V+p} \setminus L_V$. Каждой новой нормали l соответствует пара старых нормалей l_1, l_2 (см. алгоритм построения $V + p$). Вектор l включается в $L^\#$, если выполнено хотя бы одно из двух неравенств

$$\frac{|l'_1 \bar{p}|}{|\bar{p}|} < \varepsilon, \quad \frac{|l'_2 \bar{p}|}{|\bar{p}|} < \varepsilon \quad (4.1)$$

где ε — заданный параметр. Выбор условия включения нормали в $L^\#$ в виде неравенств (4.1) обеспечивает отсутствие на результирующем многограннике близких нормалей. Кроме того, условие (4.1) исключает “слишком плоские” конусы линейности опорной функции.

Изложим алгоритм удаления граней с нормальными из $L^\#$. Грани выбрасываются последовательно. Опишем правило удаления одной грани, с остальными поступаем аналогично.

Обозначим $D = V + p$. Пусть $l^\# \in L^\# \subset L_D$. Для построения аппроксимирующего многогранника $\tilde{D} = \{x: l'x \leq \rho_D(l), l \in L_D \setminus \{l^\#\}\}$ рассмотрим совокупность нормалей $\Lambda(l^\#) = \{l \in L_D: g_D(l^\#) \cap g_D(l) \neq \emptyset\}$. Из множеств L_D, G_D удаляем $l^\#$ и $G_D(l^\#)$, из A_D, K_D — вершины грани $G_D(l^\#)$ и соответствующие им конусы, а из $G_D(l)$ для $l \in \Lambda(l^\#)$ — ссылки на удаленные вершины. Построение $\tilde{D}$ сводится к выполнению второй части алгоритмов 2–4 (см. описание построения $V \div q$), в которой полагаем $\tilde{L} = \Lambda(l^\#)$, $\varphi = \rho_D$.

Отметим, что описанный способ удаления граней требует локального изменения I_{V+p} в окрестности выбрасываемых граней. Аппроксимирующий многогранник содержит исходный.

§ 5. Численные примеры

На основе предложенного алгоритма разработана программа для ЭВМ, входными данными которой являются динамика системы (возможно с фазовым вектором в правой части) и целевое множество — многогранник, задаваемый вершинами. Программа осуществляет переход к эквивалентной игре без фазового вектора в правой части, переводит заданные вершины целевого множества в информацию I_M и выполняет построение моста в рамках эквивалентной игры. Ниже приводятся два примера, просчитанных по данной программе. В первом примере строится функция цены двумерной игры, во втором — множество уровня функции цены (максимальный стабильный мост) для четырехмерной игры.

Пример 1. Рассмотрим модельную игру с фиксированным моментом окончания ϑ и терминальной функцией платы γ :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + v & |u| &\leq 1, \quad |v| \leq 1 \\ \dot{y}_2 &= u & \gamma(y) &= \max\{|y_1|, |y_2|\} \end{aligned}$$

Данная игра изучалась аналитически [15], кроме того проводились численные расчеты при помощи программы построения максимальных стабильных мостов в трехмерных играх [3, 4].

В качестве входных данных программы зададим динамику

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

$$u \in [-1, 1], \quad v \in [-1, 1]$$

и целевое множество M — часть надграфика функции платы, лежащую ниже уровня 2.5:

$$M = \{y \in R^3: \gamma(y_1, y_2) \leq y_3 \leq 2.5\}.$$

Многогранник M — пирамида с вершинами $(0, 0, 0)$, $(2.5, 2.5, 2.5)$, $(2.5, -2.5, 2.5)$, $(-2.5, 2.5, 2.5)$, $(-2.5, -2.5, 2.5)$.

На рис.1 показаны график функции цены игры $\Gamma(t, x)$ (x — вектор координат эквивалентной дифференциальной игры вида (1.1)) для момента $t = \vartheta - 2$ и его проекции на координатные плоскости. Полученные результаты соответствуют исследованиям [3, 4, 15].

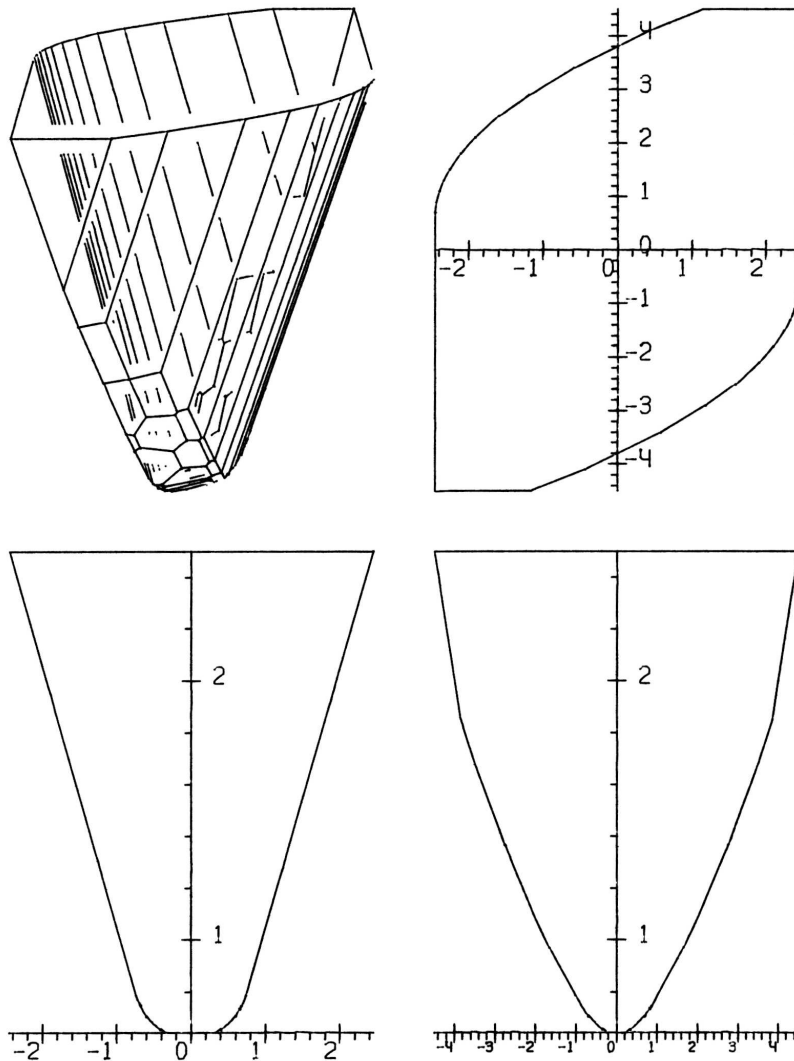


Рис. 1

Пример 2. Одну из упрощенных линейных постановок задачи о посадке самолета в условиях ветровых возмущений можно записать в виде дифференциальной игры четвертого порядка

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.032 & 0 & -0.135 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.27 & 0 & -0.014 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.577 & -2.886 \\ 0 & 0 \\ 0.288 & 40.234 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.032 & 0.135 \\ 0 & 0 \\ -0.27 & 0.014 \end{pmatrix} v$$

$$u = (u_1, u_2)' \in R^2, \quad v = (v_1, v_2)' \in R^2,$$

$$|u_1| \leq 0.7; \quad |u_2| \leq 0.17; \quad |v_1| \leq 22; \quad |v_2| \leq 18.$$

Здесь y_1 — отклонение от номинального движения по продольной оси, y_2 — скорость продольного отклонения, y_3 — отклонение по высоте, y_4 — его скорость, u_1 — отклонение от номинальной тяги, u_2 — отклонение от номинального угла атаки, v_1 — горизонтальная компонента скорости ветра, v_2 — вертикальная компонента скорости ветра.

В качестве целевого множества M зададим симметричный относительно нуля прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям. Одна из его вершин $(50, 10, 2, 0.5)$. Остальные 15 вершин получаются перебором различных комбинаций знаков координат.

Максимальный стабильный мост $W \subset R^1 \times R^4$, просчитанный от целевого множества M , можно интерпретировать как множество уровня функции цены $\Gamma \leq 1$ эквивалентной игры, в которой в качестве функции платы взята функция Минковского множества M .

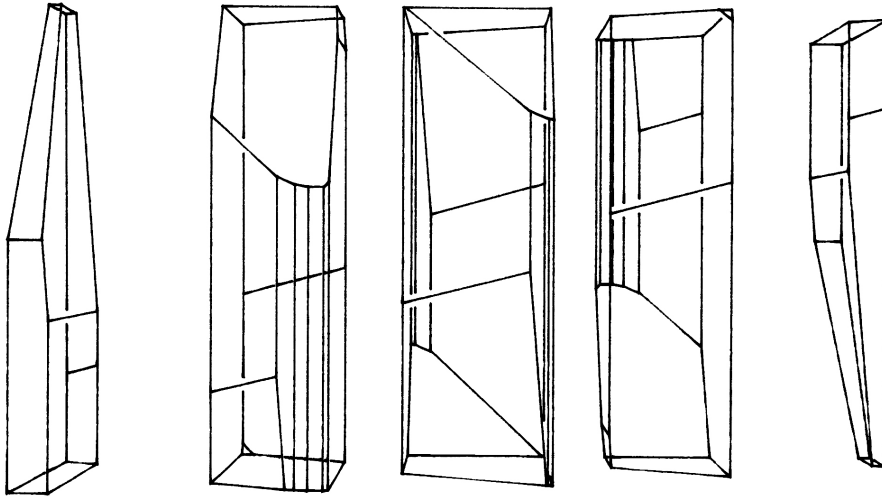


Рис. 2

На рис. 2 приведено множество $W(t) = \{x \in R^4 : \Gamma(t, x) \leq 1\} \subset R^4$ для $t = \vartheta - 2$. Четырехмерный многогранник $W(t)$ представлен несколькими сечениями гиперплоскостями $x_4 = \text{const}$. Каждое сечение изображено как трехмерный многогранник в пространстве координат x_1, x_2, x_3 .

Поступила 13.10.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984.
2. **Боткин Н.Д.** Погрешность аппроксимации в линейной дифференциальной игре // Автоматика и телемеханика. 1984. N 12. С. 5–12.
3. **Зарх М.А., Пацко В.С.** Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. N 6. С.162–169.
4. **Зарх М.А., Пацко В.С.** Численное решение трехмерных линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1985. 42с. Рукопись деп. в ВИНТИ, 28.10.85, N 7509–В85.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. **Красовский Н.Н., Решетова Т.Н.** О программном синтезе гарантированного управления // Проблемы управления и теория информации. 1988. Т. 17, N 6. С. 333–343.
7. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
8. **Лейтвейс К.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
9. **Остапенко В.В.** Методы решения одного класса задач сближения-уклонения // Автоматика и телемеханика. 1984. N 6. С. 42–46.
10. **Пономарев А.П., Розов Н.Х.** Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестник Москов. Унив. Сер. Вычисл. Мат. Кибернет. 1978. N 1. С. 82–90.
11. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, N 4. С. 764–766.
12. **Пшеничный Б.Н., Сайгадак М.И.** О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. N 2. С. 54–63.
13. **Субботин А.И.** Аппроксимация гарантированного результата в игровых задачах управления // Позиционное управление с гарантированным результатом. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 92–100.
14. **Субботин А.И., Тарасьев А.М.** Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, N 3. С. 559–564.
15. **Тарасьев А.М.** Об одной нерегулярной дифференциальной игре // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 4. С. 682–684.
16. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Приближенное построение множества позиционного поглощения в линейной задаче сближения с выпуклой целью в пространстве R^3 // Управление в динамических системах. Свердловск, 1990. С. 93–100.
17. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. N 4. С. 29–36.